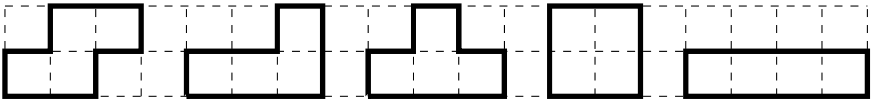
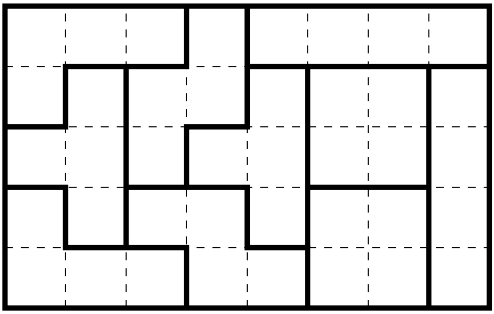
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2024-2025 г.г. по математике
Заключительный этап. 7 класс
Решения

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

7.1. Разрежьте клетчатый прямоугольник 5×8 по линиям сетки на части, изображённые ниже, таким образом, чтобы каждая из них встречалась в разрезании ровно дважды. Части можно поворачивать и переворачивать.

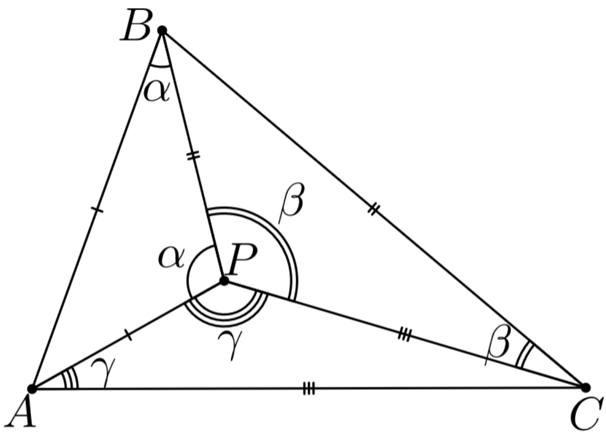


Решение. Например, можно разрезать следующим образом:



Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

7.2. Дан треугольник ABC. Артемий хочет выбрать внутри него (не на границе) такую точку P, что $AP = AB$, $BP = BC$ и $CP = CA$. Получится ли у него это сделать?



Решение. Предположим, у него получилось выбрать такую точку P. Тогда треугольники ABP, BCP и CAP являются равнобедренными, и у них равны углы при основаниях

$$\angle ABP = \angle APB = \alpha,$$
$$\angle BCP = \angle BPC = \beta,$$
$$\angle CAP = \angle CPA = \gamma.$$

Тогда, с одной стороны, все эти углы меньше 90°, так как они являются углами при основании равнобедренного треугольника, и их сумма точно меньше 270°. С другой стороны, их сумма равна в точности 360°, так как они в сумме образуют полный угол вокруг точки P. Получаем противоречие, то есть, на самом деле, такую точку P выбрать нельзя.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Отмечены равные углы при основаниях равнобедренных треугольников — 1 балл.
Доказано, что сумма этих трёх углов равна 360° — ещё 2 балла.
Доказано, что каждый из этих углов не больше 90° — ещё 2 балла.
Доказано, что их сумма точно меньше 360° — ещё 2 балла.

7.3. На доске написано четырёхзначное натуральное число N, являющееся полным квадратом. Вася утверждает, что если каждую из его цифр увеличить на единицу (девяток в старом числе нет), то снова получится полный квадрат. Найдите все возможные значения N, при которых слова Васи являются правдой. Напомним, что полными квадратами называются числа, которые являются произведением двух одинаковых целых чисел: $1 = 1 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $16 = 4 \cdot 4$, и так далее.

Решение. Заметим, что прибавление единицы к каждой цифре равносильно прибавлению к N числа 1111. Пусть $N = a^2$, а новое число оказывается равно b^2. Тогда

$$a^2 + 1111 = b^2 \iff b^2 - a^2 = 1111 \iff (b-a)(b+a) = 1111.$$

Произведение двух натуральных чисел может быть равно числу 1111, только если эти числа являются делителями 1111. В силу того, что $1111 = 11 \cdot 101$ — разложение на простые множители, и $b + a > b - a$, возможны только варианты

$$\begin{cases} b - a = 1, \\ b + a = 1111. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b - a = 11, \\ b + a = 101. \end{cases}$$

В первом случае сложим данные равенства, и получим $2b = 1112$, то есть $b = 556$, что противоречит условию, так как b^2 должно быть четырёхзначным числом, а в данном случае $556^2 > 500^2 = 250000$ уже шестизначное.

Во втором случае аналогично сложим равенства и получим $2b = 112$, откуда $b = 56$ и $a = 45$. Проверим: $a^2 = 2025$, $b^2 = 3136$, оба эти числа четырёхзначны, и отличаются на 1111. Значит, это и есть единственно возможный ответ.

Критерии. Только верный ответ — 1 балл. Этот балл не суммируется с критериями, перечисленными ниже.
Замечено, что условие задачи эквивалентно прибавлению 1111 — 1 балл.
Задача сведена к решению уравнения $(b-a)(b+a) = 1111$ — ещё 2 балла.
Верно разобран первый случай из решения — ещё 2 балла.
Верно разобран второй случай из решения — ещё 2 балла.
При отсутствии проверки во втором случае баллы не снимаются.

7.4. За круглый стол переговоров сели гномы и эльфы: суммарно 2025 участников. Эльфы всегда лгут, а гномы всегда говорят правду, но иногда ошибаются. Каждый пришедший заявил, что сидит между гномом и эльфом, и при этом ровно два гнома ошиблись. А сколько гномов за столом могло быть всего?

Решение. Для начала докажем, что никакие два эльфа не сидят рядом. Предположим, это не так, и всё-таки нашлось место, где несколько эльфов сидят подряд. Рассмотрим крайнего из них. С одной стороны от него сидит другой эльф, и, чтобы лгать, с другой стороны от крайнего тоже должен быть эльф. Но это противоречит тому, что мы выбрали крайнего эльфа, то есть описанная ситуация невозможна (ещё противоречия бы не возникло, если бы за столом сидели только эльфы, но по условию гномы были, и это тоже невозможно).

Итак, все эльфы сидят по одному, а между ними промежутки заполняют гномы. Назовём промежуток *хорошим*, если никто из гномов в нём не ошибся, и *плохим* иначе. Заметим, что плохих промежутков либо 2, либо 1, если оба совравших гнома попали в него.

Рассмотрим любой промежуток. Если в нём один гном, то он врёт, то есть это плохой промежуток. Если гномов два, то всё хорошо, а если больше, то врут те гномы, которые стоят не с края. Значит, в каждом хорошем промежутке ровно 2 гнома, а для плохих есть несколько вариантов:

- Оба совравших гнома находятся в одном промежутке, откуда сразу следует, что всего в промежутке их четверо. Тогда пусть всего за столов n эльфов. Они образуют n промежутков, из которых $n-1$ хороших, и один плохой, а всего за столом тогда сидит
$$n + 2(n-1) + 4 = 2025$$
участников (n эльфов, $n-1$ по 2 гнома и один раз по 4 гнома). Это уравнение равносильно $3n = 2023$, и оно не имеет решений, так как 2023 не делится на 3.

- Совравшие гномы находятся в промежутках длины 3. Аналогично получаем уравнение $n + 2(n-2) + 2 \cdot 3 = 2025 \iff 3n = 2023$ снова не имеет решений.

- Совравшие гномы находятся в промежутках длины 1. Аналогично получаем уравнение $n + 2(n-2) + 2 \cdot 1 = 2025 \iff 3n = 2027$ снова не имеет решений.

- Один из совравших гномов находится в промежутке длины 1, а другой — в промежутке длины 3. Аналогично получаем уравнение $n + 2(n-2) + 1 + 3 = 2025 \iff 3n = 2025 \iff n = 675$. Значит, только этот случай и возможен, а всего гномов за столом $2025 - 675 = 1350$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только ответ с примером рассадки — 1 балл.
Доказано, что нет сидящих рядом эльфов — 2 балла.

7.5. В математическом кружке 12 учеников, но на каждое занятие приходят ровно 6 из них. В какой-то момент оказалось, что любые два ученика вместе были по крайней мере на одном занятии. Какое наименьшее количество занятий могло пройти до этого момента?

Решение. Рассмотрим произвольного ученика Вову. Если он посетил меньше трёх занятий, то вместе с ним на них были максимум 10 других различных учеников, и со всеми 11-ю Вова никак не мог пересекаться. Значит, каждый ученик посетил хотя бы 3 занятия. Из этого следует, что всего «посещений» было по крайней мере $3 \cdot 12 = 36$, а занятий тогда было по крайней мере 6, так как на каждое из них приходится ровно 6 из этих «посещений».

Покажем теперь, что шести занятий могло хватить. Разобьём наших учеников на группы A, B, C, D по три человека в каждой. Пусть на первое занятие пришли группы A и B, на второе — A и C, а далее AD, BC, BD и CD. Несложно видеть, что каждый человек с каждым тогда хотя бы раз был на каком-то из занятий.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Доказано только, что потребуется хотя бы 6 занятий — 3 балла.
Приведён только пример того, что 6 занятий может хватить — 3 балла.